# 第１学年数学科学習指導案

日　　時　令和５年７月 12 日（水）５校時
場　　所　１年２組教室
担当クラス　１年２組
使用教科書　「高等学校　数学Ｉ」(数研出版)
指 導 者　日 高　 健 史

## １　単元名　　数学Ｉ　第４章　図形と計量

## ２　単元設定について

(1) 教材観

本単元はまず，直角三角形から鋭角の三角比を定義し，その後，鈍角にまで拡張する。三角比を用いることにより三角形の辺の大きさと角度の関係など様々な図形の性質が分かり，測量など実生活でも三角比はよく利用される。また平面図形だけでなく，空間図形においても三角比は非常に有用である。数学Ｉにおける三角比は幾何的側面での学習が中心となるが，数学Ⅱでの三角関数に深く関連した内容で解析的側面でも非常に応用される分野でもある。数学Ｉで三角比の基本的な性質を学習することにより，今後の学習の幅が大きく広がる。

(2) 単元の目標

直角三角形の辺の比と角との間の基本的な関係を理解し，平面図形や空間図形に関する線分の長さ，角の大きさや面積などの計算に役立てるとともに，直接測定できない角度や長さを求めることで，定理の有用性を認識することができる。

(3) 単元の評価基準

| 知識・技能 | 思考力・判断力・表現力 | 主体的に学習に取り組む態度 |
|---|---|---|
| ・鋭角の三角比の意味と相互関係について理解している。<br>・三角比を鈍角まで拡張する意義を理解している。<br>・鋭角の三角比の値を用いて鈍角の三角比の値を求めることができる。<br>・正弦定理や余弦定理について三角形の決定条件や三平方の定理と関連付けて理解している。<br>・正弦定理や余弦定理などを用いて三角形の辺の長さや角の大 | ・図形の構成要素間の関係を，三角比を用いて表現して定理や公式として導くことができる。<br>・図形の構成要素間の関係に着目し，考察することができる。<br>・日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え，三角比の考えを用いて問題を解決したり，解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。 | ・事象を図形と計量の考えを用いて考察するよさを認識し，問題解決にそれらを活用しようとしたり，粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。<br>・三角比やそれに関わる定理や公式を導くことやそれらを活用した問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとしている。 |

| | | |
|---|---|---|
| きさなどを求めることができる。 | | |

⑷ 指導観

三角比は高校で初めて学ぶ概念であるため，丁寧に説明して導入の段階で三角比の有用性や意味を理解させることが重要である。また，三角比は三角形の辺の長さや角度，面積を調べることに用いられるため，正弦定理や余弦定理，三角形の面積の公式などをきちんと定着させる必要がある。また，本単元では主に幾何的側面で三角比を学んでいくため，公式利用だけでなく，図形的側面から問題解決をさせることで深い学びに繋げることができる。また，数学Ⅱでは三角関数を学習し，解析的側面として学習するため，三角比の基礎的事項を確実に理解させることが重要である。

⑸ 単元の指導計画

第１節　三角比　(7 時間)
- １．三角比　(2 時間)
- ２．三角比の相互関係　(2 時間)
- ３．三角比の拡張　(3 時間)

第２節　図形と計量　(11 時間)
- ５．正弦定理　(2 時間)
- ６．余弦定理　(1 時間)
- ７．正弦定理・余弦定理の応用　(1 時間)
- ８．三角形の面積　(3 時間)
- ９．空間図形への応用　(3 時間)
- 問題演習　(1 時間)　(本時)

## ３　生徒観

真面目な生徒が多く，授業態度は良好である。生徒のほとんどが４年制大学を志望しており，数学に対して熱心に取り組んでいる。数学に対して苦手意識を持っている生徒もいるため，日頃から基礎・基本を大切にし，粘り強く問題に取り組む姿勢を身につけることができるよう指導している。しかし，思考力・判断力・表現力が必要な応用問題や社会や日常生活における実用的な設定の問題に対してはまだ対応することができていない。問題文から必要な情報を適切に選択し，自身がもっている知識を的確に問題解決に用いることに慣れていない。大学入学共通テストでもこのような力は必要不可欠であるため，１年時からこのような力を身につける必要があると考えている。基礎・基本を身に付けさせた上で，問いに対して見通しを持たせ，個々の考えや解法を共有できるような授業を行い，思考力・判断力・表現力を付けさせたい。

## ４　本時の学習

⑴ 題材

トレミーの定理

(2) 設定理由

これまでの学習で三角比に関する基礎的な事項を学習し，正弦定理や余弦定理などを活用して三角形の辺の長さや角の大きさ，面積などを求めてきた。公式を活用することが多いため，知識・技能を身に付けることを中心とした学習がほとんどであった。そのため，既習事項を活用して思考力・判断力・表現力を高めることができる深い学びに繋げていきたいと考え，本題材を設定した。本時では対話文からトレミーの定理を証明する流れであるが，文章から問題解決に必要な知識を適切に活用していくことが必要であるため，見通しをもたせるように指導する。そのためには公式をただ活用するだけでなく，図形を描かせることで理解を深めたいと考えている。この授業を通し，生徒が主体的に学び，対話的な学びを促し，深い学びに繋がるようにしたい。

(3) 目標

トレミーの定理に関心をもち，三角比の基礎的事項を用いて考察し取り組もうとする。

【主体的に学習に取り組む態度】

問題状況設定を理解し，見通しを立て，様々な知識を用いて問題解決に活用できる。

【思考力・判断力・表現力】

(4) 指導に当たって

ア　主体的な学びを実現する教師の手立て

授業の始めに基礎的な知識・理解の復習を行う。その上で問題文から状況を理解し，どのようにして問題解決をすればよいか考えるような問いかけを行い，生徒が見通しをもてるように工夫する。また，授業の終末には，他の証明法についても紹介し，様々な視点からトレミーの定理を捉えることができるようにすることで今回の問題の意義を考え，学びに向かう姿勢を育むきっかけにする。

イ　対話的な学びを実現する教師の手立て

見通しをもつことができた生徒とできなかった生徒の単なる答えの教え合いとならないようにしたい。問題に取り組むにあたり，自力解決をする時間を作り，全員に見通しをもたせ，自分とは違う視点をもった生徒の考えを理解し，自分の考えとの比較，検討ができるような対話を促す。

ウ　深い学びを実現する教師の手立て

問題の後半で，トレミーの定理の証明を行うが，図形が複雑化していくため，何度も図形を描かせることで図形を的確に捉え，既習事項の活用ができるようにしたい。そうすることで深い学びに繋がると考えられる。

(5) 本時の実際

| 過程 | 時間 | 学習活動 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|---|
| 導<br>入 | 5<br>分 | ・　三角比についての基礎事項を確認する。<br>・　学習課題を提示する。<br>太郎さんと花子さんが三角形や四角形の面積について，先生と会話している文章を読む。 | ・　公式や基礎的知識を確認する。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 展開Ⅰ | 10分 | ・ 四角形ABCDの面積をTについて，以下の式が成り立つ。<br>四角形ABCDにおいて，2つの対角線の長さについて，AC=$x$，BD=$y$とし，対角線ACと対角線BDの交点をEとする。∠AED=$\theta$とおくとき，<br>$T=\frac{1}{2}xy\sin\theta$　が成り立つ。<br>・ 四角形ABCDを△EAB，△EBC，△ECD，△EDAの4つの三角形に分割して考える。 | ・ 問題の状況設定を把握させる。<br>・ 三角形の面積の公式や$180°-\theta$の三角比などの既存知識を活用し問題解決させる見通しをもたせる。　【主体的な学び】<br>・ まず自力解決する時間を作る。その際，図を描くよう指導し，生徒が図形的に理解できるよう促す。<br>・ その後，生徒同士で対話をさせ，互いの考えを比較・検討させる。<br>【対話的な学び】 |
| 展開Ⅱ | 20分 | ・ トレミーの定理を証明する。<br>円Kに内接する四角形ABCDにおいて，<br>AC・BD=AB・DC+AD・BC<br>が成り立つ。<br>・ 展開Ⅰで求めた四角形ABCDの面積Tの式を用いて証明する。<br>・ ∠BAC=α，∠ABD=βとおくことで，$\theta=\alpha+\beta$が成り立つ。<br>・ 線分BDの垂直二等分線に関して点Aを対称移動した点をFとする。<br>・ T=△ABD+△BCD<br>=△FDB+△BCD<br>=△FBC+△CDF と式変形することで定理の式になることを導く。 | ・ 証明の方針を理解するために，会話文から得られる条件を図示していく。<br>・ まずは自力解決する時間を作る。<br>・ 数学的な見方や考え方を働かせ$\theta=\alpha+\beta$や△FDB≡△ABDがなぜ成り立つのかを理解させる。<br>・ 左記を踏まえ，生徒同士で対話をさせ，互いの考えを比較・検討させる。　【対話的な学び】<br>・ 記号が多く，図も複雑になるため何度も図形を描かせて式の意味を理解させる。<br>【深い学び】 |
| まとめ | 5分 | ・ 本時の振り返りを行う。<br>・ 扱った既存知識<br>① 三角形の面積の公式<br>② 円に内接する四角形の性質<br>③ $180°-\theta$の三角比<br>・ トレミーの定理の証明の別解の紹介<br>① 余弦定理を用いた方法<br>② 補助線と三角形の相似を用いる方法 | ・ 振り返る際に，この問題の意図や扱った既存知識を再確認し，知識の統合・発展を図る。【主体的で深い学び】 |

太郎さんと花子さんは三角形や四角形の面積について，先生と話をしている。三人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

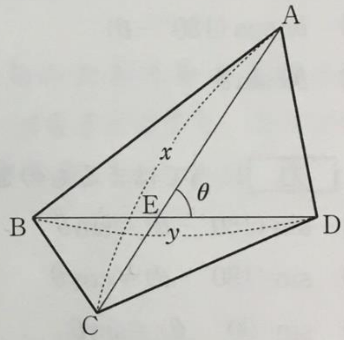
太郎：三角形 ABC について，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle CAB=A$，$\angle ABC=B$，$\angle BCA=C$ と表すことにすると，三角形 ABC の面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{2}b\boxed{\text{ア}}$$

と表すことができます。

花子：$b$ を底辺とみたとき，$\boxed{\text{ア}}$ が高さになるので，「(底辺)×(高さ)÷2」で三角形の面積が表せるということを三角比を用いて表現した式ですね。

太郎：あっ！　そういえば，

> 右の図のような四角形 ABCD において，2 つの対角線の長さについて，$AC=x$，$BD=y$ とし，対角線 AC と対角線 BD の交点を E とする。
> $\angle AED=\theta$ とおくとき，四角形 ABCD の面積 $T$ について，$T=\frac{1}{2}xy\sin\theta$ が成り立つ。
>
> 
> 

という内容を本で見たことがあるんだ。これは $S=\frac{1}{2}b\boxed{\text{ア}}$ と関係があるのかな。

花子：この 2 つの式は似た形をしているね。

太郎：四角形を 4 つの三角形に分割して考えると，四角形 ABCD の面積 $T$ は

$$T=\triangle EAB+\triangle EBC+\triangle ECD+\triangle EDA$$

と表せます。この 4 つの三角形の面積については，先ほどの三角形の面積の式を適用すると，$EA=a$，$EB=b$，$EC=c$，$ED=d$ とおけば

$$\triangle EAB=\frac{1}{2}\boxed{\text{イ}},\quad \triangle EBC=\frac{1}{2}\boxed{\text{ウ}},$$

$$\triangle ECD=\frac{1}{2}\boxed{\text{エ}},\quad \triangle EDA=\frac{1}{2}\boxed{\text{オ}}$$

と表せます。

花子：すると，三角比に関する関係式 $\boxed{\text{カ}}$ と $x=\boxed{\text{あ}}$，$y=\boxed{\text{い}}$ に着目して，$T$ に関する式を変形していくと，確かに $T=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$ となりますね。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから二つ選べ。

⓪ $c\cos A$　① $c\sin A$　② $c\cos C$　③ $c\sin C$　④ $a\cos A$
⑤ $a\sin A$　⑥ $a\cos C$　⑦ $a\sin C$　⑧ $a\sin B$　⑨ $c\cos B$

(2) $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。

⓪ $ad\sin\theta$　① $ab\cos\theta$
② $ad\cos(180°-\theta)$　③ $ab\sin(180°-\theta)$
④ $cd\sin(180°-\theta)$　⑤ $bc\sin\theta$
⑥ $bc\cos(180°-\theta)$　⑦ $cd\cos(180°-\theta)$
⑧ $bd\sin\theta$　⑨ $bd\cos(180°-\theta)$

(3) $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　① $\sin(180°-\theta)=-\sin\theta$
② $\sin(180°-\theta)=\cos\theta$　③ $\sin(180°-\theta)=-\cos\theta$
④ $\sin(90°-\theta)=\sin\theta$　⑤ $\sin(90°-\theta)=-\sin\theta$
⑥ $\sin(90°-\theta)=-\cos\theta$　⑦ $\sin(90°+\theta)=-\cos\theta$

(4) $\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$ のそれぞれに当てはまる式を，$a$，$b$，$c$，$d$ のうちから必要なものを用いて表せ。解答は，解答欄 $\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$ にそれぞれ記述せよ。

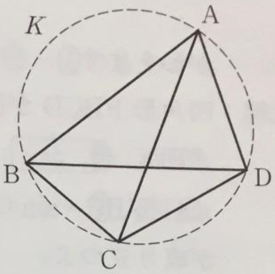
先生：この四角形の面積を表す式の応用を教えてあげましょう。
「トレミーの定理」とよばれる有名な定理です。

**トレミーの定理**

円 $K$ に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$$

が成り立つ。




「対角線の長さの積が“向かい合う辺の長さの積の和”になっている」という式です。

花子：「向かい合っている辺の長さをかける」って，イメージがつかめないわ。

太郎：けれども，「対角線の長さをかける」というのは，先ほどの四角形の面積の式にありますね。

先生：だから，トレミーの定理を四角形の面積の式で求めることができるのです。さっそく，とりかかってみましょう。

まず，∠BAC と∠ $\boxed{\text{キ}}$ は等しい。この角の大きさを $\alpha$ とおき，∠ABD の大きさを $\beta$ とおくことにする。$\alpha+\beta$ を $\theta$ とおくと，先ほどの四角形の面積の式から，四角形 ABCD の面積 $T$ は

$$T=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta$$

と表されます。

花子：先ほどと同様に，２つの対角線 AC，BD の交点を E とすると，∠AED $=\theta$ となり，四角形の面積の式を適用すると，確かに

$T=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta$ が成り立ちますね。

太郎：示したい式の中の「対角線の長さの積」が現れていますね。

先生：線分 BD の垂直二等分線に関して三角形 ABD を線対称移動したとき，点 A が移る点を F とすると，点 F は円 $K$ 上にある。すると

$$\begin{aligned}T&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\triangle\boxed{\text{ク}}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=(\text{四角形 D}\boxed{\text{ケ}}\text{の面積})\\&=\triangle\boxed{\text{ケ}}+\triangle\boxed{\text{コ}}\end{aligned}$$

が成り立ちます。

花子：すると，三角形 FDB と三角形 ABD が合同であることより

$$\angle FDB = \boxed{\text{サ}}$$

であるから

$$\angle FDC = \boxed{\text{シ}}$$

がいえます。

太郎：四角形 FBCD が円に内接することから，$\angle FBC + \angle FDC = 180^\circ$ であり，

$\angle FDC = \boxed{\text{シ}}$ なので

$\sin\angle FBC = \sin(180^\circ - \angle FDC) = \sin(180^\circ - \boxed{\text{シ}}) = \sin\boxed{\text{シ}}$

が成り立つよ。

花子：すると

$$T = \frac{1}{2}\cdot\boxed{\text{ス}}\sin\boxed{\text{シ}} + \frac{1}{2}\cdot\boxed{\text{セ}}\sin\boxed{\text{シ}}$$

$$= \frac{1}{2}(\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}})\sin\boxed{\text{シ}}$$

より

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta = \frac{1}{2}(\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}})\sin\boxed{\text{シ}}$$

が成り立つわ。

太郎：再び，三角形 ABD と三角形 FDB が合同であることをふまえると

$$AC\cdot BD = AB\cdot DC + AD\cdot BC$$

が成り立つことが示せたね。「トレミーの定理」の証明がこれで完了したよ。

花子：対称移動することで，向かい合う辺だった長さを隣り合う辺の長さとしてみることができるのね！

(5) $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。

⓪ CAD　① ADC　② ACD　③ BCD　④ BCA
⑤ BDC　⑥ ABC　⑦ ABD　⑧ ADB　⑨ BAD

(6) $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ ABC　① CDF　② FDB　③ ABE
④ AEC　⑤ BDC　⑥ FBC　⑦ EDB

(7) $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。

⓪ $\alpha$　① $\beta$　② $\theta$　③ $\alpha-\beta$　④ $\beta-\alpha$
⑤ $\alpha+\theta$　⑥ $\beta+\theta$　⑦ $\alpha-\theta$　⑧ $\beta-\theta$

(8) $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪ BC·DB　① EB·EA　② FC·CD　③ EC·EA　④ EB·ED
⑤ FD·DC　⑥ FD·BC　⑦ AC·BD　⑧ FB·DC　⑨ FB·BC